Grado en Matemáticas

Análisis Funcional – Examen Parcial

1. a) Sea X un espacio normado, $a, b \in X$ y $r > 0, s > 0$ tales que $B(a,r) \subset B(b,s)$. Prueba que $\|b-a\| \leqslant s-r$.

   b) Prueba que en un espacio de Banach toda sucesión decreciente de bolas cerradas tiene intersección no vacía.

2. En el espacio vectorial $X = \left\{ x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty \right\}$ se considera el producto escalar definido para todo $x, y \in X$ por

   $$\langle x|y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)y(n)}{n}$$

   Prueba que la norma definida en X por dicho producto escalar no es completa.

   Sugerencia. Considera la sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{e}_k$ donde los e_k son los vectores unidad.

3. Sea $T : c_0 \to \ell_1$ el operador lineal definido para todo $x \in c_0$ por

   $$[Tx](n) = \frac{x(n)}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   Calcula su norma y prueba que T no la alcanza. ¿Qué puedes decir si el mismo operador se considera definido en ℓ_∞ en lugar de en c_0?

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ pongamos $u_n = \mathrm{e}_{3n-2} + \mathrm{e}_{3n-1} + \mathrm{e}_{3n}$ donde los e_n son los vectores unidad en ℓ_2 y consideremos el conjunto $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_2$.

   Describe los espacios $M = A^{\perp}$ y $M^{\perp}$ y calcula las proyecciones ortogonales sobre ellos.

5. Responde a uno de los dos siguientes temas.

   a) Teorema de la proyección ortogonal.

   b) Teorema de Hahn-Banach (versión analítica).

Granada, 10 de noviembre de 2018